微分法

1. 微分法とは

x の値を決めると y の値が 1 つに決まるとき，y は x の関数であるといいます。たとえば，

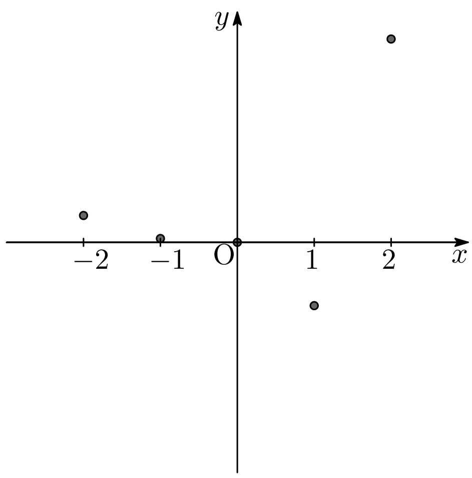
$$y = \frac{1}{x} \ \cdots ①, \qquad y = x^2 \ \cdots ②$$

はどちらも関数ですね。しかし，① も ② もグラフは (1, 1) を通るという点は共通ですが，変化の様子は明らかに違います。つまり，通る点がわかるだけでは，その関数を十分に理解しているとはいえないのです。

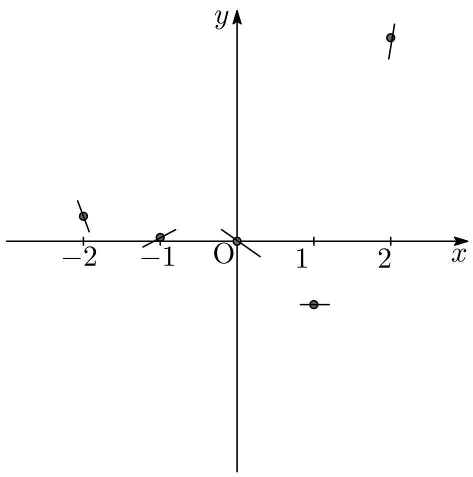
もう少し複雑な関数を考えてみましょう。

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{4}x \ \cdots ③$$

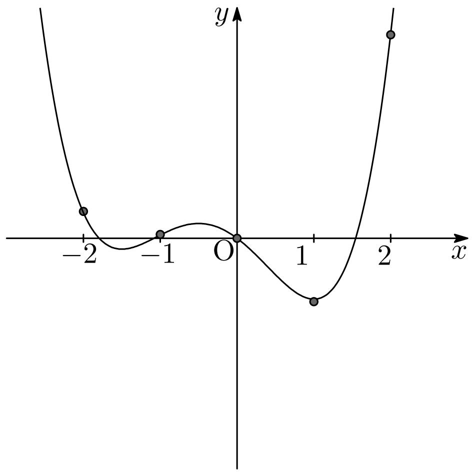
のグラフは？ とりあえず，いくつか点をプロットしてみると，



となるのですが，グラフが想像できますか？ 次に，各点での“ 傾き ”を描き加えてみます（どうやって描いたかは (2) を参照)。



ずっと想像しやすくなったのではないでしょうか？ 本当の曲線も描いておきましょう。



このように，各点の“ 傾き ”（微分係数という）を調べることを「微分法」というわけですが，これによって，関数の変化の様子がわかり，より詳しい情報を引き出すことができるのです。

それでは,「微分係数」はどうやって求めるのでしょうか？

2．微分係数 (多項式での話)

微分法の基本的なアイデアは“ 曲線の一部は直線である ”ということです。ある一点を中心にどんどん拡大していけば，曲がったものがだんだんまっすぐに見えてくるはずで，言いかえると，曲線に沿ってごく僅か移動するとき，直線に沿って移動しているとみなせるのです。

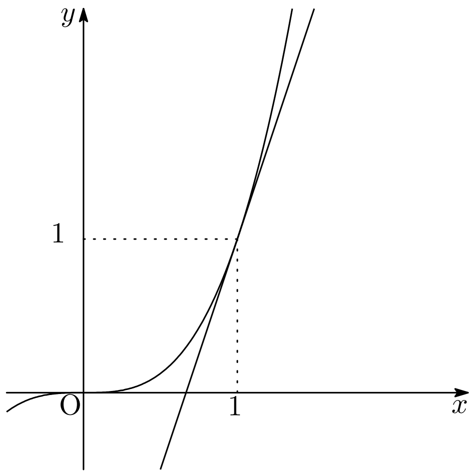
$y=f(x)=x^3$ を例に計算してみましょう。$x=1$ から $x=1+\Delta x$ へ移動したとき y 方向の変化量 Δy を計算すると, (一般に，変化量には Δ(デルタ) という記号をつけて表します)

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1^3=3(\Delta x)+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

となり，変化量 Δx が十分 0 に近ければ，$(\Delta x)^2$ や $(\Delta x)^3$ はより 0 に近い量なので，

$$\Delta y \quad 3(\Delta x)$$

と Δx の 1 次で近似できます。つまり，点 (1, 1) の近くでは「傾き 3 の直線 $y=3(x-1)+1$」に沿って移動しているとみなせるのです。実際，図示してみると



確かに，点 (1, 1) の近くでは 2 つは区別できませんね。この直線

$$y=3(x-1)+1$$

を点 (1, 1) での接線と呼びます。

一般に，$y=f(x)$ の $x=a$ での変化量が，

$\Delta f=f(a+\Delta x)-f(a)$

$=A\Delta x+B(\Delta x)^2+C(\Delta x)^3+\cdots\ \cdots$☆

（$A,\ B,\ C,\ \cdots$ は Δx に関係しない定数）

と表されるとき，A をこの点での「微分係数」といい $f'(a)$ と表します。A はその点での接線の傾きを表しており，その値の大小によりグラフの“ 伸びていく方向 ”がわかるのです。ちなみに (1) の

$y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{8}x^2-\dfrac{3}{4}x$

の場合だと

$f'(a)=a^3+a^2-\dfrac{5}{4}a-\dfrac{3}{4}\ \cdots$④

なので，$a=-2,\ -1,\ \cdots$ と代入して傾きを求めたのでした。

ここで，④ は x の関数 $x^3+x^2-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{3}{4}\ \cdots$⑤ に $x=a$ を代入したものと見ることができます。つまり，④ は微分係数を与える関数であり，その意味で「導関数」といい，一般に $f'(x)$ という記号で表します。 また，$f(x)$ から $f'(x)$ をつくることを「微分する」といいます。

さて，$f(x)$ が多項式ならいつでも☆の形にできるので，多項式の微分については実質的に終わりです。しかし，$\sqrt{\ }$ や分数を含むもの，三角関数，指数関数などの関数には通用しません。そこで，一般的な関数にも適用できる微分係数の定義を考えましょう。

3. 微分係数 (一般的な話)

もう一度☆の式を書いてみます。

$\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$

$= A\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \cdots \quad \cdots$☆

必要なのは係数 A だけです。そこで，両辺を Δx で割ると

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + B(\Delta x) + C(\Delta x)^2 + \cdots$$

右辺において，もし $\Delta x = 0$ なら A しか残りません。しかし，左辺で $\Delta x = 0$ とするわけにはいきません (分母が 0 では意味をなしませんね)。そこで，Δx をピッタリ 0 ではなく 0 に“ 限りなく近づける ”(極限) ということを考えるのです。このとき，$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ の値は A に限りなく近づき，このことを

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

と書きます。つまり，☆の形に表されなくても

「$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ の値が一つに定まれば，それが $A = f'(a)$ である」

といえるので，これを微分係数の定義とします。一つ計算例を挙げておきましょう。

(例) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 　(スッキリさせるため Δx を h と書いて)

$\displaystyle\lim_{hto0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$

したがって，$f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ あるいは $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ です。

実際の極限計算には関数に応じた技巧が必要となるのですが，原理としてはこれがすべてです。