微分の逆の積分で面積がもとめられるのはなぜ？

1. はじめに

この疑問に答える前に，積分についてハッキリさせておきましょう。
定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の定義には次の 2 つの流儀があります。

(A) 図 1 の斜線部の面積を符号 (±) 付きで考えたものを $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と定める。
(詳しくは「積分って何？」をご覧下さい」)

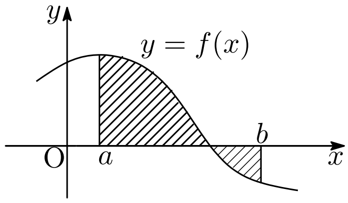

図 1

(B) $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ として $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ と定める。

現在，高校の教科書では (B) 方式が主流のようですが，(A) 方式も皆無ではありません。実は，大学では (A) 方式で定積分を定義した後 (それなりに厳密な議論が必要ですが)，(B) を定理として証明します。

いずれの立場であるにせよ，(A) と (B) が同じだとは自明ではありませんね。一方を前提として他方を証明する必要があります。

2. 本題

とにかく「面積を求めたい」を出発点としましょう。

問. 図2の斜線部の面積を S を求めよ。

ここで，a, b は与えられた定数ですが，このままでは考えにくいでしょう。そこで，図3のように b を変数 t に変えてみます。つまり，S を直接求めるのではなく，

<u>t を変えたとき面積 S がどう変わるか</u>

を考察し，それを手がかりとして S の正体に迫ろうというわけです。

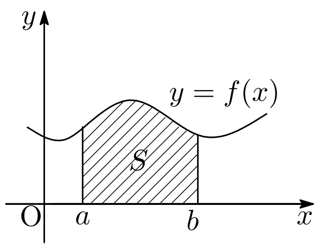

図2

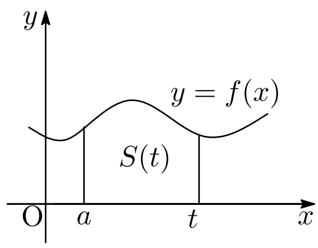

図3

図3のように $a \leqq x \leqq t$ の範囲の面積を $S(t)$ とおきます。t が $\Delta t(>0)$ だけ変化したときの $S(t)$ の増分 $\Delta S(t)$ は図4の斜線部の面積で，ほぼ「高さが $f(t)$，幅が Δt の長方形」とみなせます。

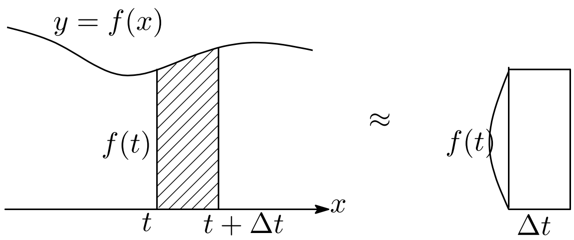

図4

$$\Delta S(t) \approx f(t)\Delta t \quad (\approx \text{は近似の意味です})$$

これから「$\Delta S(t)$ は Δt に比例し，その比例係数が $f(t)$ 倍」つまり

$$S'(t) = f(t) \quad \cdots ①$$

とわかります (「微分って何？」をご覧下さい)。近似では気持ち悪いという方には次の証明をどうぞ。

(① の証明)

$t \leqq x \leqq t+\Delta t$ の間で，$f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすれば

$$m\Delta t \leqq \Delta S \leqq M\Delta t$$

$\Delta t>0$ なので，

$$m \leqq \frac{\Delta S}{\Delta t} \leqq M$$

Δt を 0 に近づけていくとき，その過程で M や m は変化するけれども，最終的にはどちらも $f(t)$ に近づいていくので，$\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ も $f(t)$ に近づきます。(厳密には $\Delta t<0$ の場合も考える必要がありますが，結果は変わりません。)

したがって，① が示されました。

さて，① に戻りましょう。$S'(t)=f(t)$ ということは $S(t)$ は $f(t)$ の原始関数の一つです。$f(x)$ の原始関数とは微分して $f(x)$ となるような関数のことをいうのですが，(定数)$'=0$ なので例えば

$(x^2)'=(x^2+3)'=(x^2-\frac{5}{3})'=2x$

のように $2x$ の原始関数は無数にあります。しかし，それらは定数差の違いでしかないのです。今，$f(x)$ は与えられていますから，その原始関数を 何でもよい から 1 つ選んで $F(x)$ として下さい。そうすると，

$S(t)=F(t)+C$ (C は定数)

と表されます ($F(t)$ は既知であるのに対して $S(t)$ は未知であることに注意しましょう)。この未知な定数 C を決めたいのですが，実は $t=a$ のとき面積は 0 なので

$S(a)=F(a)+C=0$ より $C=-F(a)$

つまり

$S(t)=F(t)-F(a)\ \cdots$②

となることが示されました。このことから，

(A) の立場では，$S(t)$ を $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ と表すので (B) が示されます。

(B) の立場では，$F(t)-F(a)$ を $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ と表すので (A) が示されました。

(注) 上の過程では $f(x)>0$ と仮定してあります。$f(x)<0$ のときは $f(t)\Delta t<0$ なので “ 負の面積 ”として計算することになります。したがって，② の $F(t)-F(a)$ は正確には “ 符号つき面積 ”というべきでしょう。