

微分方程式って何？

微分方程式って何なのでしょう。微分も方程式も単独なら知ってるんだけど…、というところから話を始めましょう。

まず、方程式から何を思い浮かべますか。

$$2x + 1 = 0, \quad x^2 + x + 1 = 0$$

などではないでしょうか。これらは、未知数の x が例えば $2x + 1 = 0$ という関係式を満たすということでした。そしてそのような未知数 x を見つけることを方程式を解くと言うのでした。これらは代数方程式と呼ばれて、古代より人類が研究してきたものです。時代がずっとくだると、数だけでなく、関数に対してもある関係式を満たすもの、つまり関数の方程式を考えるようになりました。例えば、

$$\begin{aligned} f(x+1) &= xf(x), \\ f(x) &= f(1-x) \end{aligned}$$

などは、未知関数 f の関数方程式と言えるわけです。

そこで微分の登場です。たくさんの種類のある関数方程式の中でも、微分を含んでいるような関数方程式のことを微分方程式といいます。例えば、

$$f'(x) = f(x)$$

でも、もう立派な微分方程式です。なぜなら、未知関数 $f(x)$ の微分が元の関数に戻るという関係を表しているからです。

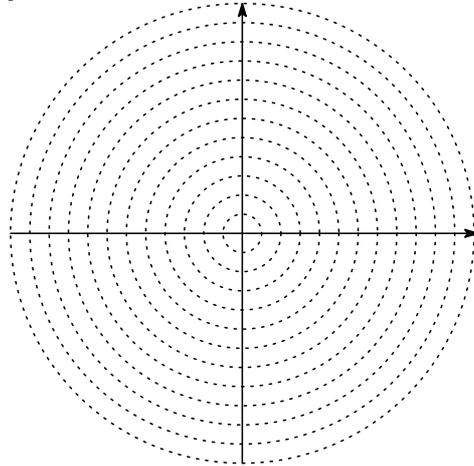
では、どうして微分方程式を考えるのでしょうか。それは Newton 以来さまざまな自然現象を記述するのに用いられてきたからです。そして、そのような微分方程式を満たす未知関数を見つけることは、それらの現象の解明につながるからです。

ここでは、未知関数の見つけ方（微分方程式を解くといいます）や、微分方程式の一般論を展開する余裕はないので、いくつかの例を使って微分方程式のイメージをつかんでもらうことにしましょう。

例 1

$$y' = -\frac{x}{y}$$

これは x の関数 y が上のような関係式を満たしているという意味です。では、どんなイメージを描いたらいいのでしょうか。 y' は y の微分、 y の接線の傾きのことですから、それが右辺で与えられてるということです。右辺は x と y の値がわかれば決まってしまうので、それを xy 平面に描いてみましょう。



例えば、 $(x, y) = (1, 1)$ の点では右辺の値は -1 なので $(x, y) = (1, 1)$ の点のところに傾き -1 の短い線分を描くことにします。それをいろいろな点で行ったのが上の図です。求める関数 $y(x)$ はこの線分に接しているの

$$x^2 + y^2 = r^2$$

となるはず。実際、円上の点 (x_0, y_0) での接線の傾きは $-\frac{x_0}{y_0}$ になっていることからわかります。

上の図は次のように見るとわかりやすいでしょう。線分は風の吹く方向だと考えます(矢印は書いてませんが)。そしてどこか一点に風船を置きます。すると風の流れに沿って風船が流れていくはずですね。その流れていく道筋が求める関数 $y(x)$ を表しているのです。

例 2

人口の増加という社会科学からの話題をとりましょう。 $y(x)$ を時刻 x での人口を表しているとする、 $y(x)$ はどんな関係式を満たすでしょうか。出生率、死亡率ともに一定とすると、差し引きの増加率も一定のはずです。それを定数 k とおくと、一定期間の人口の増加分は $ky(x)$ です。 $y(x)$ の増加分は微分でもあらわせるから

$$y' = ky$$

という微分方程式が得られます。このようにある現象を調べて、微分方程式を作ることを微分方程式を立てるといいます。この微分方程式を解いてみると実は

$$y(x) = Ce^{kx}$$

となります。ここで C は $x = 0$ の時点での人口を表しています。でも、この解は変ですね。指数関数ですから人口爆発を意味しています。これは現実的ではありません。

ということは微分方程式の立て方がまずかったのかもしれません。修正してみましょう。人口増加の比例定数 k は一定としてましたが、現実には人口が増えるほど、環境も悪化して増加率 k は鈍化するはずです。それを考慮に入れましょう。

$$k = a - by(x)$$

ならどうでしょう。 a と b は定数とすると、人口の増加率 k は人口 $y(x)$ の増加とともに減少することになります。これで修正版の微分方程式を立てることができました。

$$y' = (a - by)y$$

では、これを満たす $y(x)$ はどんな関数になるのでしょうか。実は、微分方程式のほんの初歩だけで、この $y(x)$ は求めることができます。みなさん、自分で考えてみるなり、適当な本の最初の方をながめてみるなりしてください。きっと簡単に解くことができるでしょう。そうしたら、人口問題についても何かわかるかも？