行列って何の役に立つの？

一般的な話をするよりも，具体的な応用例を紹介する方がわかりやすいでしょう。

1. 連立方程式を解く

行列を知っている方なら，数 C の教科書にも書いてあることなので特に説明はいらないでしょうが，一応説明しておきます。

$$\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 5x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，両辺に左から $\dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdots$ ① をかけると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

より $(x,\ y) = \left(\dfrac{8}{26},\ \dfrac{7}{26}\right)$ と一気に解けます。

一般に，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $ad-bc \neq 0$ を満たすとき

$$AX = XA = I$$

$$\left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{は単位行列と呼ばれ，普通の数での 1 に対応します} \right)$$

となる行列 X が存在し，この X を A の逆行列と呼び A^{-1} と表します。これは普通の数での逆数に対応するものです。具体的には

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と公式化され，① もこれを用いて得られたのです。

もっと，成分の多い $3 \times 3,\ 4 \times 4,\ \cdots$ の行列についても逆行列の公式があるのですが，かなりやっかいで「行列式」「余因子」などといった準備が必要になります (大学での線形代数で学びます)。

2. 数列の漸化式

問. フィボナッチ数列 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$ について

$$a_{m+n} = a_{m+1}a_n + a_m a_{n-1}$$

を示せ。

数学的帰納法でも簡単に証明できますが，次のように考えると見通しよく解決します。

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表されるので，番号を 1 つ減らして

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

これらをまとめると

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(右辺と左辺で番号がちょうど 1 つだけずれていることに注意)

となるから

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}$$

と (形式的には) 簡単に表せます。そこで

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}$$

を書き直した

$$\begin{pmatrix} a_{m+n+1} & a_{m+n} \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m+1} & a_m \\ a_m & a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

において，(1, 2) 成分を比べると $a_{m+n} = a_{m+1}a_n + a_m a_{n-1}$ であることがすぐわかります。

上記のような 3 項間の漸化式について一般項を求めることは可能ですが，必ずしもわかりやすくなるとは限りません。かえって見通しが悪くなることもあるでしょう。必要に応じて適切な形を用いるように心がけたいものです。そのためにもいろんな見方を知ることは決して損ではないと思います。

3．1次分数式

関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,\ c,\ d$ は定数) を考えます。これは

$$\frac{f(x)}{1}=\frac{ax+b}{cx+d}\ \text{つまり}\ \begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

と考えることができます。ここで，$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix}$ は平面のベクトルと考えており，$//$は (普通の) 平行の意味です。すると，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば

$$\begin{pmatrix} f(f(x)) \\ 1 \end{pmatrix} // A\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} // A^2\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

などより，一般に合成関数 $f^n(x)$ (f を n 回合成した関数) に関して

$$\begin{pmatrix} f^n(x) \\ 1 \end{pmatrix} // A^n\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

と，行列の n 乗を計算することに帰着されます。さらに，A^{-1} が存在すれば

$$A^{-1}\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\cdot f(x)-b}{-c\cdot f(x)+a}=x$$

すなわち，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が $\dfrac{dx-b}{-cx+a}$ と与えられることがわかります。つまり，

$$f\ \text{でうつす}\ \leftrightarrow\ A\ \text{をかける}$$

$$f^{-1}\text{でうつす}\ \leftrightarrow\ A^{-1}\text{をかける}$$

という対応関係があるのです。

4. 2次式

$f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ここで $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が対称行列 ($a\to c$ の対角線に対して対称) であることに注意して下さい。

このとき，適当な角度 θ(A によって決まります) だけ座標軸を回転して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とすると

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\alpha X^2+\beta Y^2$$

と変形できることが知られています。こうすることで，2次式 $f(x,\ y)$ を見通しよく考察でき，2次曲線 $f(x,\ y)=k$ (k は定数) の概形も簡単に調べることができます。

(※) 残念ながら，このあたりの事情は一言では説明できません。

「固有値・固有ベクトル」「対角化」「対称行列の性質」などを

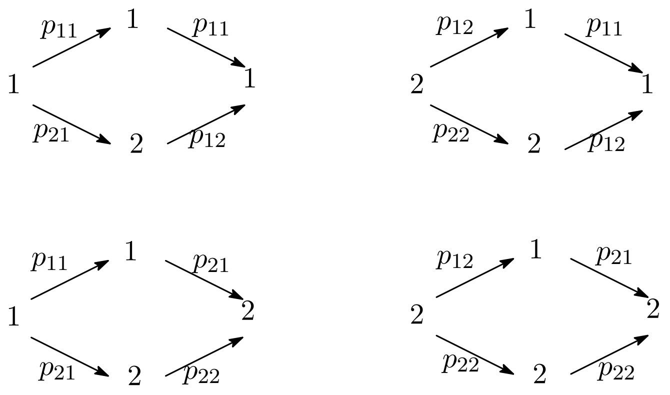
学ぶ必要があります。

5．遷移確率

2つの状態1，2間の移り変わりが確率で与えられているとします。例えば1秒間で移動する確率が

	1から	2から
1へ	p_{11}	p_{12}
2へ	p_{21}	p_{22}

と与えられているとき，この表をそのまま行列と思って $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ とおきます。このとき2秒後を考えてみると，次の図



を考えることでそれぞれの確率が計算できますが，これをよく見ると

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} \end{pmatrix}$$

の各成分と全く同じです。このことから，3，4，$\cdots$，n 秒後については

P^3，P^4，$\cdots$，P^n を計算すればよいとわかります。

6. 線形写像

「線形性」という性質をご存じでしょうか？ 行列を用いる最大の目的は「線形性を具体的に表す」ことにあります。

正比例関数は $f(x) = ax$ (a は定数) と表されますが，これは次の性質

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(kx) = kf(x)\ (k \text{ は実数}) \end{cases} \quad \cdots ①$$

を持っており，この性質を線形性といいます。一般に写像 f が ① をみたすとき「線形写像」と呼ばれます。このとき，x, y はもはや 1 つの変数とは限りません。例えば $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ のようなベクトルでも良いのです。(“ 線形 ”は英語で linear つまり 1 次と同義です)。

わかりやすく平面の写像 f を考えましょう。平面のベクトルを $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のように表すと，線形性は

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})\ (k \text{ は実数}) \end{cases} \quad \cdots ②$$

と表されます。「それってどんな f？」とは聞かないで下さい。どんな f だろうが以下の議論があてはまるところが重要なのですから (簡単な例として「原点のまわりの回転」「原点を通る直線に関する対称移動」「原点を通る直線への正射影」などがあります)。

さて，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}$ と表されるので，② を用いると

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}\right) = xf(\boldsymbol{u}) + yf(\boldsymbol{v})$$

となります。そこで，$f(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおけば

$$f(\boldsymbol{x}) = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このように 2 つの $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の像 (f で写される先) を求め，それを並べた行列を作っておけば，どんな $\boldsymbol{x}$ の像もその行列をかけることで求まります。こうして，各々の f に対してそれを表す行列 (表現行列といいます) があり，f を具体的に表してくれるのです。