外積って何？

最終更新日：2001 年 10 月 1 日

「外積ってどんなのでしたっけ？」という質問が多いので，その定義と性質，および代表的な応用をまとめておきます。なお，以下の定義と性質は同値なので，逆に性質の方を定義とする場合もあります。

1　定義

> 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して， $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
>
> なるベクトルを「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積」といい,「$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$」(エー・クロス・ビー) と書く。

成分がちょっとややこしく見えますが,

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (3) \\ (1) \\ (2) \end{array} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ a_1 & & b_1 \end{array}$$

のように,「y 成分から始まって y 成分で終わる 3 つのたすきの差」と覚えておけばよいでしょう。

【例】

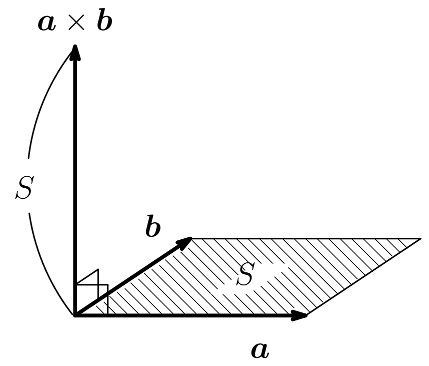
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2　性質

さて，次に外積の性質です。

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 S に等しい。
2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に共に垂直。
3. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は順に右手系。

（ただし，平行四辺形がつぶれて $S=0$ となる $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に関しては，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ である。）



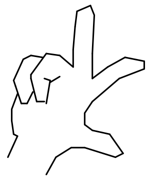
まず性質1については，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ として，平行四辺形の面積の公式

$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

を利用して確かめられます。

性質2についても，同様に成分で内積が0となることで確かめられます。

性質 3 の「$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系」というのは，右手を図のような形にしたとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ がそれぞれ親指，人差し指，中指の向きになるということです。



性質 1 により大きさが決まり，性質 2 により方向（向きとしては 2 つ）が決まり，最後に性質 3 により 2 つの向きのうち 1 つに決まることで，外積ベクトルが 1 つに決まることに注意しましょう。

さて，この性質 3 は次のようにして示されます。

まず，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ はこの順で右手系。ここで，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をその 1 次独立性を保ったまま連続的に変化させて，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ にすることを考える。このとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は右手系でなければならない。なぜなら，もし左手系だとすれば，変化の途中で左手系から右手系にうつる瞬間がある。そのとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は零ベクトルになることになるが，これは性質 1 より $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積が 0 ということになり，1 次独立を保ったまま変化することに矛盾する。

3　応用

さて，外積の使い方です。次のようなケースがあります。いろいろな量が外積により簡単な式で表されることに注目してください。

3.1　2つの方向に共に垂直な方向を求める

たとえば，A，B，C の3点が与えられているとき平面ABCの法線ベクトルは，性質2より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

で与えられます。

3.2　平行四辺形の面積

空間内の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の面積Sは，性質1より，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ を計算するだけです。

なお，三角形の面積は平行四辺形の面積の半分として計算できます。

【例】A$(1,1,0)$，B$(2,2,1)$，C$(-2,3,3)$ のとき $\triangle$ABC の面積 S は,

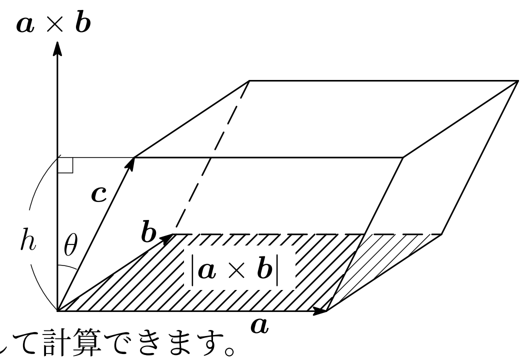
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{62}}{2}$$

3.3　平行6面体の体積

空間内の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で張られる平行6面体の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ } h) \\ &= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\theta| \\ &= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| \end{aligned}$$

と表されます。(θ は $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のなす角)



なお，4面体の体積は平行6面体の 1/6 として計算できます。

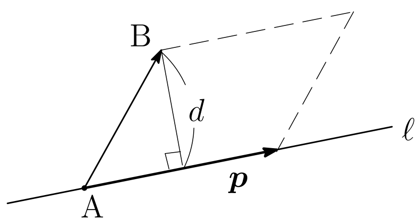
【例】A$(1,1,0)$，B$(2,2,1)$，C$(-2,3,3)$，D$(0,3,-1)$ のとき四面体 ABCD の体積 V は,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}| \\
&= \frac{1}{6}\left|\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= 3
\end{aligned}$$

3.4　点と直線の距離

直線 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\boldsymbol{p}$　(t はパラメータ) と点 B の距離 (垂線の長さ) d は,

$$d = \frac{(\text{平行四辺形の面積})}{(\text{底辺})} = \frac{|\boldsymbol{p} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{|\boldsymbol{p}|}$$

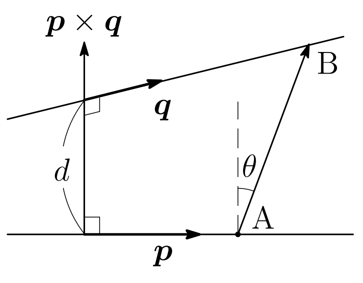


と表されます。

3.5　2 直線の距離

2 直線 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\boldsymbol{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\boldsymbol{q}$ (s, t はパラメータ) の距離 (共通垂線の長さ) d は，θ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ のなす角として,

$$\begin{aligned}
d &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\cos\theta| \\
&= \frac{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\cos\theta|}{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}|} \\
&= \frac{|(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}|}
\end{aligned}$$



と表されます。　(saku)