積分法

1．区分求積法

「この土地の面積は？」「この樽に入るワインの量は？」など，昔から面積や体積を求めることは切実な問題であり，古くから考えられてきた問題でした。ここで，古代ギリシャの学者たちが考え出した方法を紹介しましょう。

図 1 の斜線部の面積 S に対し，
彼らの方法を適用すると次のようになります。

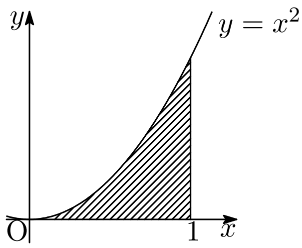


図 1

(i) まず，$0 \leqq x \leqq 1$ の区間を n 等分し，
n 個の部分に分割します。(図 2)

(ii) (図 3) 左から k 番目の部分を大きめに見積もって，

「幅が $\dfrac{1}{n}$，高さが $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ の長方形」

と考えると，その面積は $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 \dfrac{1}{n} = \dfrac{k^2}{n^3}$ となるので，それらの合計は

$$U_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

となります。いや，小さめに見積もって高さを $\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2$ としたいという意見もあるでしょう。この場合は，

$$L_n = \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

が得られます。すると $L_n < S < U_n$ が成り立ちます。

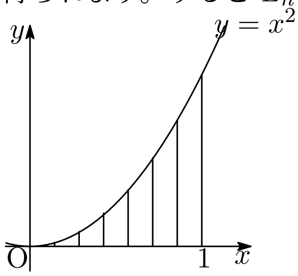


図 2

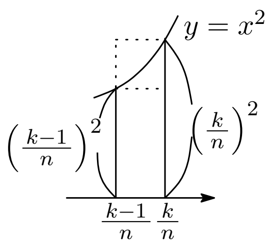


図 3

(iii) L_n も U_n もあくまで近似に過ぎないのですが，

$\underline{n\text{ を大きくすればだんだん真の面積 }S\text{ に近づく}}$

と期待されます。実際 $n = 10,\ 100,\ 1000,\ \cdots$ として計算してみると，

n	L_n	U_n
10	0.285	0.385
100	0.32835	0.33835
1000	0.3328335	0.3338335
10^4	0.333283335	0.333383335
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10^8	0.33333332833333335	0.33333333833333335

どうです？ どうも $\dfrac{1}{3}$ に近づくようですね。和の公式

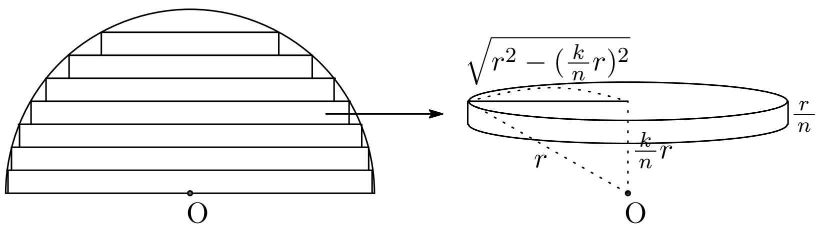
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を知っていれば，$\dfrac{1}{n}$ が限りなく 0 に近づくことから

$$U_n = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$L_n = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

のどちらも $\dfrac{1}{6} \times 1 \times 2 = \dfrac{1}{3}$ に近づくことがハッキリわかります。

体積も同様な考え方で計算できます。例として，球の体積を求めてみましょう。図のように半球を n 等分します (めんどうなので，小さめの近似だけ考えます)。



各々を円板と思えば，k 番目の円板について，

「半径は $\sqrt{r^2 - \left(\dfrac{k}{n}r\right)^2}$，厚みは $\dfrac{r}{n}$」

なので，体積は $\pi r^2 \left\{1 - \left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\} \times \dfrac{r}{n} = \pi r^3 \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{k^2}{n^3}\right)$

n 個の円板を合計した体積

$$V_n = \pi r^3 \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}\right)$$

は，$\pi r^3 \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\pi r^3$ に近づくことがわかります。つまり，球の体積は 2 倍して $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ とわかりました。

以上のように考えて面積や体積を求める方法は「区分求積法」とよばれています。

ところで「限りなく近づく」という表現をしましたが，どうも気持ち悪いと言う方もおられるのではないでしょうか？そんな歯切れの悪い言い方をせず「面積は $\frac{1}{3}$ だ!」と言いたいですよね？ ところが，よ〜く考えてみると，私たちは曲線で囲まれた図形の面積なんて私たちは知らないのです。円の面積だって，実は上と同じように考えて（つまり細かく分割して) 導いたはずです。知らない以上“ わかっているものを利用して 決める ”しかありません。つまり，面積は上記のように，限りなく近づく値 (極限値) として決めると考えるべきなのです。

2. 積分とは

1. で考えたことを少し一般化すればもう定積分です。

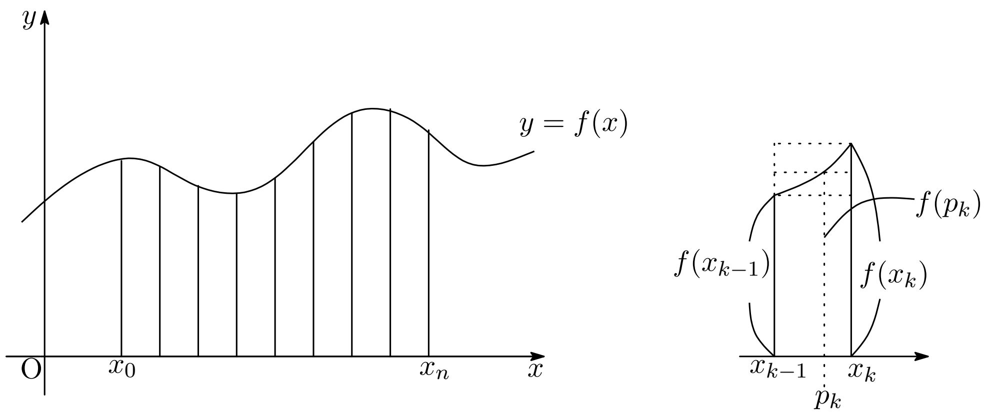
$y = f(x)$ のグラフがあるとき，$a \leqq x \leqq b$ の範囲で図の面積 S を考えましょう。この区間を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と分割し，図のように n 個の部分に分けます (必ずしも等分である必要はありません)。そうして，各区間を

「幅 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ の長方形」

と思うのです。



高さは? 左端の $f(x_{k-1})$ でも右端の $f(x_k)$ でも，あるいは好きな場所を選んで $f(p_k)$ $(x_{k-1} < p_k < x_k)$ としてもかまいません。自由に選んで下さい。そうして左から Δx_k だけ進む毎に面積 $f(p_k)\Delta x_k$ を加えて

$$\begin{aligned} S_n &= f(p_1)\Delta x_1 + f(p_2)\Delta x_2 + \cdots + f(p_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta x_k \ \cdots ② \end{aligned}$$

とします。そこで，n を限りなく大きくし，各区間の幅を 0 に近づけます。区間の分け方といい高さの取り方といい，かなり好き勝手にしていますが，実は，$f(x)$ が連続 (グラフに

切れ目がないということ) ならば，いつでも一定値に近づくことが証明されています。この S_n の極限値を面積 S と定め，

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

という記号で表します。これが「$f(x)$ の a から b までの定積分」です。この記号を用いると先ほどの結果は

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

と表されます。

なお，上記の $f(x)$ は暗黙の内に $f(x) > 0$ と仮定していましたが，$f(x) < 0$ のときも気にせず ② を考えて，その極限として $\int_a^b f(x)dx$ とします (この場合は負の値)。つまり，定積分とは“ 符号のついた面積 ”なのです。

3．実際の計算〜微分・積分から微積分へ

ところで，定積分の意味がわかっても計算は面倒ですね。もっとラクに計算できないのでしょうか？これを明らかにしたのがイギリスのニュートンとドイツのライプニッツでした。彼らの偉いところは，接線を求めるための「微分法」と，面積・体積を求めるための「積分法」とのみごとな関係を明らかにしたことです。

結果はこうです。

「微分して $f(x)$ となるような関数 $F(x)$ を見つけると ($F(x)$ を $f(x)$ の原始関数と呼びます)，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

である。」

例えば，$f(x) = x^2$ の原始関数として $\frac{1}{3}x^3$ があるので，

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$

と瞬時にしかも一般的に求まります。彼らのおかげで，それまで専門家でさえ苦労していた求積問題に誰でも立ち向かえるようになり，その結果，解析学の急速な発展がもたらされたのでした。