Sur

ベクトル

1. ベクトルは移動を表す

(1) ベクトルとは

2 点 A，B があるとき，A から B への移動量を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書き「ベクトル AB」といいます。しかし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ だけでは具体的にいくら移動するのかわかりません。そこで xy 座標平面を考えて,「x 軸方向へ 3，y 軸方向へ 4 だけ移動」しているなら,

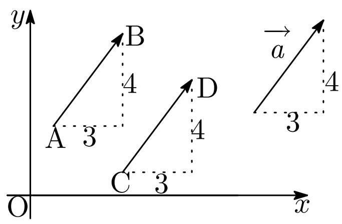
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4) \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と表し，これを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と呼びます。もし，空間内で考えるなら，z 軸方向を付け加えるだけです。

また，逆向きの移動は $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ですが，これを $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表します。

(2) 等しいベクトル

さて，移動を表すのですから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と定めます。つまり,“ 移動量が等しい ”ものは等しいと定めます。すると，もはや始点や終点を明記する必要はなく，一文字で $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のように表してもよいのです。



(3) ベクトルの大きさ

$\overrightarrow{a}$ で移動する距離を，ベクトルの大きさとよび $|\overrightarrow{a}|$ と表します。上の場合なら $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ ですね。もちろん，$|\overrightarrow{b}| = 5$ だからといって，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$ とは限りません。移動の向きは無数にあるのですから。このように，ベクトル (vector) とは「向き」と「大きさ」をもつ“ 数 ”と考えることができます。これに対して「大きさ」のみの数をスカラー (scalar) といいます (これまでの普通の数，とりあえずは実数と思って下さい)。

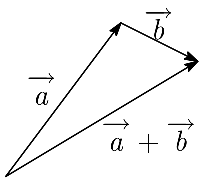
なお，始点と終点が一致した（つまり全く移動しない）ベクトルを零ベクトルといい $\overrightarrow{0}$ と表します。成分では $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ です。

(4) さあ，新しい数「ベクトル」について演算を考えましょう。

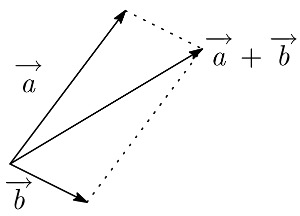
(i) 和 $\vec{a}+\vec{b}$：　2つの移動 $\vec{a}$，$\vec{b}$ を続けて行った結果です。各成分どうしを加えるのみ。

(例) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ならば，$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3+2\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

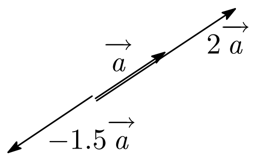
図形的には次の2とおりの考え方ができます。



または



(ii) スカラー倍 $k\vec{a}$：　k 倍に伸ばす，あるいは縮める。ただし，$k<0$ なら逆向きになります。各成分は k 倍されます。



(5) 1次結合

いくつかのベクトルをスカラー (実数) 倍して加えたもの

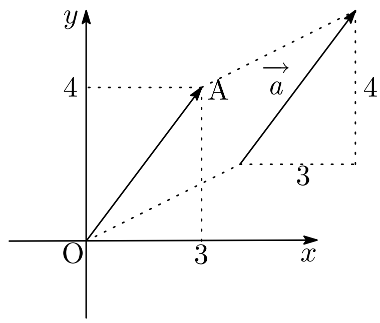
$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_n\vec{a}_n$$

を $\vec{a}_1$，$\cdots$，$\vec{a}_n$ の1次結合といいます。1個だけで $x_1\vec{a}_1$ としても1次結合です。

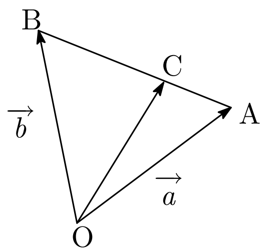
2. ベクトルは位置を表す

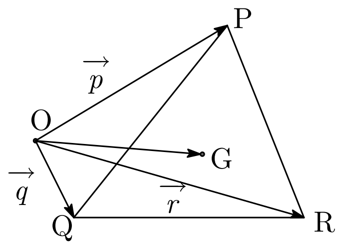
(1) 位置ベクトル

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\cdots$ と書くとき，始点は各ベクトルごとに違っていても良いのですが，“ どこでも良い ”と言われると逆に困ってしまいますね。そこで，すべてのベクトルの始点を共通にしてみましょう。始点を O と定め，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$ となる終点 A を考えると，$\overrightarrow{a}$ が決まれば点 A は１つに決まります。例えば $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ なら，O から x 方向へ 3，y 方向へ 4 だけ移動した点は１つですね（O を原点 (0, 0) と考えれば，ちょうど (3, 4) という点!)。つまり，１つベクトル $\overrightarrow{a}$ が１つの点 (の位置) を表しているのです。このとき「点 A の位置ベクトルは $\overrightarrow{a}$ である」といいます。



すると，例えば





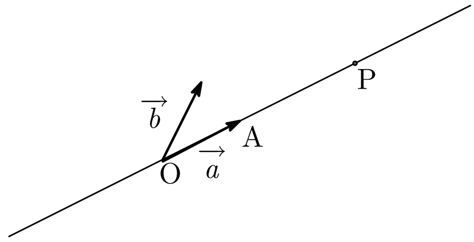
AB を 1 : 2 に内分する点 C の位置は $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{a} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$，

△ PQR の重心 G の位置は $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{p} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{q} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{r}$

(なぜか考えてみて下さい) と幾何的な条件を代数的に表現することができ，これを応用すれば図形問題を計算で解決することが可能になるのです。

(2) 基底と座標

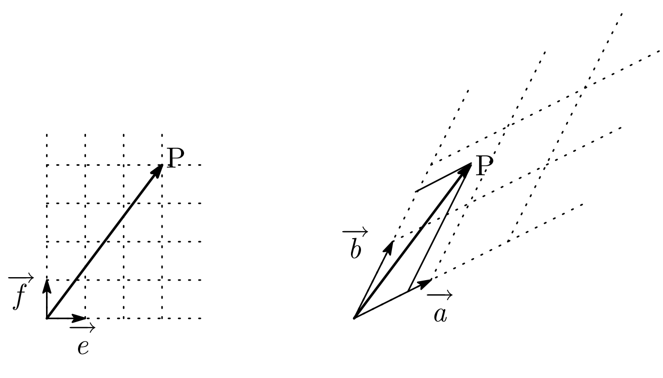
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{a}$ (x は実数) で定められる点 P は直線 OA 上にあり，x が変化すると直線全体を動きます。



次に，$\overrightarrow{a}$ と平行でない $\overrightarrow{b}(\neq \overrightarrow{0})$ を 1 つ選びます。例えば $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としておきましょう。すると，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は互いに他の 1 次結合では決して表されず，この事実を「$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立である」といいます。要するに，$\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{a}$ とか $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{b}$ の形には決して表されない，相手に依存しないということです。$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ をどう選ぶかは自由なのですが，一旦選んでしまえば，平面上のどんな点 P も

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$$

と表され，しかも表し方は一通りです。これは下図のように，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形を単位として格子を作ることで納得できるでしょう。このとき，2 数の組 $(x,\ y)$ を「$\{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\}$ を基底とする P の座標」といいます。一般的な座標です。これに対して，普通に用いている xy 座標は $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底としたものです。



例えば P(3, 4) なら

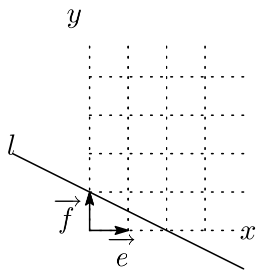
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{5}{3}\overrightarrow{b} \left(= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

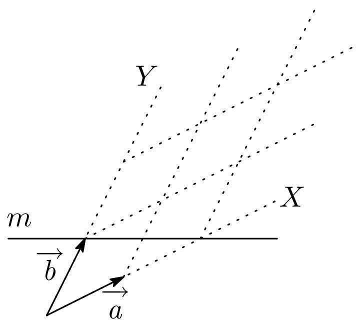
なので，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を基底とする座標は $\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ となります。

このように，平面内では1次独立なベクトルが2個選べ，それらの1次結合で他のすべてのベクトルを表すことができ，この意味で「平面は2次元である」といいます。もちろん空間なら3次元です。

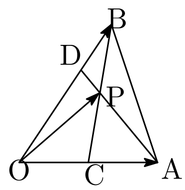
(3) 座標の応用例

(例1) 左図の xy 座標で $(2, 0)$ と $(0,\ 1)$ を通る直線 l の式は $\frac{1}{2}x + y = 1$ ですね。すると，右図の XY 座標で $(2, 0)$ と $(0,\ 1)$ を通る直線 m も $\frac{1}{2}X + Y = 1$ と表されます。





(例2) 問.「△OABにおいて，OAの中点をC，OBを2 : 1に内分する点をDとし，ADとBCの交点をPとするとき，点Pの位置を求めよ。」



[解]　点Pの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底とする座標を $(X,\ Y)$ とすると，

直線BCの式は $2X + Y = 1$ $\cdots$ ①

直線ADの式は $X + \frac{3}{2}Y = 1$ $\cdots$ ②

これらの交点を求めて $X = \frac{1}{4}$, $Y = \frac{1}{2}$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

3. ベクトル空間

いくつかの平面ベクトルの１次結合はやはり平面ベクトルであり，いくつかの空間ベクトルの１次結合はやはり空間ベクトルですね。この性質に注目することにより『ベクトル空間』という概念が生まれます。定義はこうです。

『一般に集合 A があり，いくつかの元 (要素) の１次結合が常に A に含まれるとき，A をベクトル空間という』

(厳密にはもっと細かい条件が必要なのですが …)

この定義によれば,

「3 次以下の多項式 $a + bx + cx^2 + dx^3$ 全体」

「$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ をみたす数列 $\{a_n\}$ 全体」

「微分可能な関数全体」

はどれもベクトル空間であり，多項式も数列も関数もそれぞれ“ ベクトル ”と思うことができます (この“ ベクトル ”はもはや「矢」ではなく抽象化されたものです)。こうして一見異質に見えるものでも，内在する性質に注目することによって統一的に捉えることができるのです。